7. Stunde

Thursday, April 29, 2010
14:11

Lem: TFAE (the following are equivalent):

(1) A r.e. (olh.: $\exists B \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ rek, $A = \{x : \exists y\ (x,y) \in B\}$

(2) $\exists g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ part. rek $A = dom(g) = \{x \in \mathbb{N} : g(x) \text{ def.}\}$

(3) $\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ part. rek. $A = f''\mathbb{N} = \{f(x) : x \in dom(f)\}$

(4) $A = \emptyset$ oder $\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total rek $A = f''\mathbb{N}$

(5) A endl oder $\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total, inj., rek $A = f''\mathbb{N}$

Bew: (5) $\to$ (4) und (4) $\to$ (3) klar

(3) $\to$ (2) $A = f''\mathbb{N} = \{y : \exists \langle x, z\rangle : T(m, x, z) \;\&\; y = (z)_0\}$

(dabei ist m der Code einer Maschine die f berechnet).

$g(y) := \mu k : T(m, (k)_0, (k)_1) \;\&\; y = ((k)_1)_0$

$g(y)$ def gdw $f(y)$ def gdw $y \in A$

(2) $\to$ (1) $A = dom(g) = \{x : \exists y\ T(m, x, y)\}$ ist

Proj. einer rek. (sogar: prim. rek) TM von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

(1) $\to$ (5) Sei A unendl und die Projektion von B.

$P_0(s, y) :\Leftrightarrow \forall m < lg(s) : y \neq (s)_m$ ist prim. rek.

$h_0 : s \mapsto \mu z : z = \langle x, y\rangle, (x, y) \in B, P_0(s, y)$

ist also rek, und (weil A unendl) total.

$h_1(\langle a_0, a_1, .., a_n\rangle) := \langle a_0, a_1, .., a_n, h_0(\langle a_0 .. a_n\rangle)\rangle$

ist tot. / rek, (weil die "append" Fkt rek ist),

$f(0) := (h_1(0))_0 \in A$

$f(1) := (h_1(h_1(0)))_1 = (\langle f(0), h_0(\langle f(0)\rangle)\rangle)_1 =$

$h_0\langle f(0)\rangle$ ist in A und ungleich $f(0)$.

Allgemein:

$f(n) = (h_1^{n+1}(0))_n$ ist in A, ungl. $f(0), .., f(n-1)$

$\Rightarrow f$ ist die gesuchte Fkt:

total, inj und $f''\mathbb{N} \subseteq A$ nach Konstruktion

$f''\mathbb{N} = A$: Sei $x \in A$. Dann gibt es y sd $(x, y) \in B$

Sei y sd $(x,y) \in D$ und $\langle x,y \rangle$ <u>min.</u> mit dieser Eig. Es gibt nur endl viele $z < \langle x,y \rangle$, h_1 nimmt also irgendwann den Wert $\langle x,y \rangle$ an, damit ist x in Bild von f.